

相空间中含时滞的非保守力学系统的 Noether 定理*

金世欣¹, 张毅²

(1. 苏州科技学院 数理学院, 江苏 苏州 215009;
2. 苏州科技学院 土木工程学院, 江苏 苏州 215009)

摘要: 研究相空间中含时滞的非保守力学系统的 Noether 对称性与守恒量。建立含时滞的非保守系统动力学的 Hamilton 正则方程; 依据相空间中含时滞的 Hamilton 作用量在无限小群变换下的广义准不变性, 给出相空间中含时滞的 Noether 广义准对称变换的定义和判据; 并建立相空间中含时滞的非保守力学系统的 Noether 对称性与守恒量之间的联系。文末, 举例说明结果的应用。

关键词: 非保守系统; Noether 对称性; 时滞; 相空间; 守恒量

中图分类号: O316 **文献标志码:** A **文章编号:** 0529-6579(2014)04-0056-06

Noether Theorem for Nonconservative Mechanical System with Time Delay in Phase Space

JIN Shixin¹, ZHANG Yi²

(1. College of Mathematics and Physics, Suzhou University of Science and Technology, Suzhou 215009, China;
2. College of Civil Engineering, Suzhou University of Science and Technology, Suzhou 215009, China)

Abstract: The Noether symmetries and the conserved quantities for nonconservative mechanical systems with time delay in phase space are studied. Firstly, the Hamilton canonical equations with time delays for the non-conservative systems are established. Secondly, according to the generalized quasi-invariance of the Hamilton action with time delay in phase space under the infinitesimal transformations of groups, the definitions and criterion of the Noether generalized quasi-symmetric transformations with time delay in phase space are given. Lastly, the relationship between the Noether symmetries and the conserved quantities with time delay in phase space are established. At the end, an example is given to illustrate the application of the results.

Key words: nonconservative system; Noether generalized quasi-symmetry; time delay; phase space; conserved quantity

时滞现象普遍存在于自然界和工程实际中, 从自然界到人类社会, 从自然科学、工程技术到社会科学, 时间滞后现象无处不在^[1]。即使一个很简单的问题, 一旦考虑时滞的影响, 就使得动力学行为变得更为复杂, 也更为接近力学本质^[1-3]。而力学系统的对称性对其动力学行为及其基本性质都具有深刻的影响, 从基本理论到具体应用都显示出对

称性的极端重要性^[4-16]。考虑含时滞的变分问题的研究可追溯到 El'sgol'c^[17] 的工作; 1968 年, Hughes^[18] 讨论了含时滞的变分和最优化控制问题, 建立了含时滞的 Euler-Lagrange 方程; 随后, Palm 和 Schmitendorf^[19], Rosenblueth^[20], Chan 和 Yung^[21] 以及 Lee 和 Yung^[22] 对含时滞的变分问题做了进一步的研究。然而, 含时滞的变分对称性与守

* 收稿日期: 2013-12-29

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10972151, 11272227); 苏州科技学院研究生科研创新计划资助项目(SKCX12S-039)

作者简介: 金世欣(1987年生), 男; 研究方向: 数学物理; 通讯作者: 张毅; E-mail: weidiezh@gmail.com

恒量的研究才刚刚开始。2012 年, Frederico 和 Torres^[23] 首次讨论了含时滞的变分和最优化问题的 Noether 对称性, 得到了含时滞的 Euler-Lagrange 方程以及含时滞的最优化问题的 Hamilton 正则方程, 并讨论了含时滞的 Lagrange 系统和最优化控制 Hamilton 系统在点变换下的 Noether 对称性与守恒量。2013 年, 张毅和金世欣^[24-25] 研究了含时滞的非保守系统动力学的 Noether 理论, 建立了含时滞的非保守系统的 Lagrange 方程, 给出了含时滞的 Noether 对称变换、准对称变换以及广义准对称变换的定义和判据, 建立了在速度依赖的无限小群变换下含时滞的非保守力学系统的 Noether 理论, 并将其进一步推广到含时滞的 Hamilton 系统的 Noether 对称性与守恒量。

本文进一步研究相空间中含时滞的非保守力学系统的 Noether 对称性与守恒量。给出相空间中含时滞的非保守系统的 Hamilton 原理, 建立含时滞的非保守系统的 Hamilton 正则方程; 在依赖于广义速度的无限小群变换下, 给出含时滞的 Hamilton 作用量的变分公式, 建立相空间中含时滞的非保守力学系统的 Noether 广义准对称变换的定义和判据; 研究含时滞的 Noether 广义准对称性与守恒量之间的联系, 得到相空间中含时滞的非保守力学系统的 Noether 定理。

1 含时滞的非保守系统的 Hamilton 正则方程

设力学系统的位形由 n 个广义坐标 $q_s (s = 1, 2, \dots, n)$ 来确定, 考虑系统具有时滞, 其 Lagrange 函数为^[24]

$$L = L(t, q_s(t), \dot{q}_s(t), q_s(t - \tau), \dot{q}_s(t - \tau)) \triangleq L(t, q_s, \dot{q}_s, q_{s\tau}, \dot{q}_{s\tau}) \quad (1)$$

引进含时滞的广义动量和 Hamilton 函数

$$p_s(t) = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}(t), p_s(t - \tau) = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_{s\tau}}(t), \quad (s = 1, 2, \dots, n) \quad (2)$$

$$H = H(t, p_s, q_s, p_{s\tau}, q_{s\tau}) =$$

$$p_s(t)\dot{q}_s(t) + p_s(t - \tau)\dot{q}_s(t - \tau) - L \quad (3)$$

含时滞的非保守系统的 Hamilton 原理为

$$\int_{t_1}^{t_2} [\delta(p_s(t)\dot{q}_s(t) + p_s(t - \tau)\dot{q}_s(t - \tau) - H) + Q''_s(t)\delta q_s] dt = 0 \quad (4)$$

其中非势广义力为 $Q''_s = Q''_s(t, p_s, q_s, p_{s\tau}, q_{s\tau})$, 并满足边界条件

$$q_s(t) = \delta_s(t), \quad t_1 - \tau \leq t \leq t_1 \quad (5)$$

$q_s(t) = q_s(t_2), \quad t = t_2, (s = 1, 2, \dots, n)$ (6) 其中时滞常量 $\tau < t_2 - t_1$ 是给定的正实数, $\delta_s(t)$ 是在区间 $[t_1 - \tau, t_1]$ 上的已知分段光滑函数, $q_s(t_2)$ 为已知实数。原理 (4) 可写为

$$\int_{t_1}^{t_2} \left[\delta p_s \dot{q}_s(t) + \delta \dot{q}_s p_s(t) + \delta p_{s\tau} p_s(t - \tau) + \delta \dot{q}_{s\tau} p_s(t - \tau) - \frac{\partial H}{\partial p_s}(t) \delta p_s - \frac{\partial H}{\partial q_s}(t) \delta q_s - \frac{\partial H}{\partial p_{s\tau}}(t) \delta p_{s\tau} - \frac{\partial H}{\partial q_{s\tau}}(t) \delta q_{s\tau} + Q''_s(t) \delta q_s \right] dt = 0 \quad (7)$$

进行变量替换 $t = \theta + \tau$, 并考虑条件 (5), 有

$$\int_{t_1}^{t_2} \left(\delta p_{s\tau} \dot{q}_s(t) + \delta \dot{q}_{s\tau} p_{s\tau}(t) - \frac{\partial H}{\partial p_{s\tau}}(t) \delta p_{s\tau} - \frac{\partial H}{\partial q_{s\tau}}(t) \delta q_{s\tau} \right) dt = \int_{t_1}^{t_2 - \tau} \left\{ \delta p_s (\dot{q}_s(\theta + \tau) - \frac{\partial H}{\partial p_s}(\theta + \tau)) + \delta \dot{q}_s p_{s\tau}(\theta + \tau) - \frac{\partial H}{\partial q_{s\tau}}(\theta + \tau) \delta q_s \right\} d\theta \quad (8)$$

将 (8) 式代入 (7) 式, 得到

$$\int_{t_1}^{t_2} \left[\delta p_s (\dot{q}_s(t) + \dot{q}_{s\tau}(t + \tau) - \frac{\partial H}{\partial p_{s\tau}}(t) - \frac{\partial H}{\partial p_s}(t + \tau)) + \delta \dot{q}_s (p_s(t) + p_{s\tau}(t + \tau)) - \left(\frac{\partial H}{\partial q_s}(t) + \frac{\partial H}{\partial q_{s\tau}}(t + \tau) - Q''_s(t) \right) \delta q_s \right] dt + \int_{t_2 - \tau}^{t_2} \left[\delta p_s (\dot{q}_s(t) - \frac{\partial H}{\partial p_s}(t)) + \delta \dot{q}_s p_s(t) - \left(\frac{\partial H}{\partial q_s}(t) - Q''_s(t) \right) \delta q_s \right] dt = 0 \quad (9)$$

利用分部积分计算, 并考虑边界条件 (5) 和 (6), 得

$$\int_{t_1}^{t_2 - \tau} \left(\frac{\partial H}{\partial q_s}(t) + \frac{\partial H}{\partial q_{s\tau}}(t + \tau) - Q''_s(t) \right) \delta q_s dt = - \left\{ \delta q_s \int_{t_1}^{t_2 - \tau} \left(\frac{\partial H}{\partial q_s}(\theta) + \frac{\partial H}{\partial q_{s\tau}}(\theta + \tau) - Q''_s(\theta) \right) d\theta \right\} \Big|_{t_1}^{t_2 - \tau} + \int_{t_1}^{t_2 - \tau} \delta \dot{q}_s \left[\int_{t_1}^{t_2 - \tau} \left(\frac{\partial H}{\partial q_s}(\theta) + \frac{\partial H}{\partial q_{s\tau}}(\theta + \tau) - Q''_s(\theta) \right) d\theta \right] dt = \int_{t_1}^{t_2 - \tau} \delta \dot{q}_s \left[\int_{t_1}^{t_2 - \tau} \left(\frac{\partial H}{\partial q_s}(\theta) + \frac{\partial H}{\partial q_{s\tau}}(\theta + \tau) - Q''_s(\theta) \right) d\theta \right] dt \quad (10)$$

以及

$$\int_{t_2 - \tau}^{t_2} \left(\frac{\partial H}{\partial q_s}(t) - Q''_s(t) \right) \delta q_s dt = \left\{ \delta q_s \int_{t_2 - \tau}^{t_2} \left(\frac{\partial H}{\partial q_s}(\theta) - Q''_s(\theta) \right) d\theta \right\} \Big|_{t_2 - \tau}^{t_2} - \int_{t_2 - \tau}^{t_2} \left[\int_{t_2 - \tau}^{t_2} \left(\frac{\partial H}{\partial q_s}(\theta) - Q''_s(\theta) \right) d\theta \right] \delta \dot{q}_s dt = - \int_{t_2 - \tau}^{t_2} \left[\int_{t_2 - \tau}^{t_2} \left(\frac{\partial H}{\partial q_s}(\theta) - Q''_s(\theta) \right) d\theta \right] \delta \dot{q}_s dt \quad (11)$$

将式 (10) 和 (11) 代入式 (9), 得到

$$\int_{t_1}^{t_2-\tau} \left\{ \delta p_s \left[\dot{q}_s(t) + \dot{q}_{s\tau}(t+\tau) - \frac{\partial H}{\partial p_s}(t) - \frac{\partial H}{\partial p_{s\tau}}(t+\tau) \right] + [p_s(t) + p_{s\tau}(t+\tau) - \frac{\partial H}{\partial q_s}(\theta) + \frac{\partial H}{\partial q_{s\tau}}(\theta + \tau) - Q''_s(\theta)] d\theta \right\} \delta \dot{q}_s dt + \int_{t_2-\tau}^{t_2} \left\{ \delta p_s \left(\dot{q}_s(t) - \frac{\partial H}{\partial p_s}(t) \right) + (p_s(t) + p_{s\tau}(t+\tau) - \frac{\partial H}{\partial q_s}(\theta) - Q''_s(\theta)) d\theta \right\} \delta \dot{q}_s dt = 0 \quad (12)$$

将式 (3) 两边对广义动量求偏导数, 得到

$$\dot{q}_s(t) + \dot{q}_{s\tau}(t+\tau) - \frac{\partial H}{\partial p_s}(t) - \frac{\partial H}{\partial p_{s\tau}}(t+\tau) = 0, \quad t_1 \leq t \leq t_2 - \tau, \\ \dot{q}_s(t) - \frac{\partial H}{\partial p_s}(t) = 0, \quad t_2 - \tau < t \leq t_2 \quad (13)$$

将式 (13) 代入式 (12), 并由积分区间的任意性以及 $\delta \dot{q}_s$ 的独立性, 得

$$p_s(t) + p_{s\tau}(t+\tau) - \int_{t_1}^{t_2-\tau} \left(\frac{\partial H}{\partial q_s}(\theta) + \frac{\partial H}{\partial q_{s\tau}}(\theta + \tau) - Q''_s(\theta) \right) d\theta = 0, \quad t_1 \leq t \leq t_2 - \tau, \\ p_s(t) + \int_{t_2-\tau}^{t_2} \left(\frac{\partial H}{\partial q_s}(\theta) - Q''_s(\theta) \right) d\theta = 0, \quad t_2 - \tau < t \leq t_2 \quad (14)$$

将式 (14) 对时间 t 求导, 有

$$\dot{p}_s(t) + \dot{p}_{s\tau}(t+\tau) + \frac{\partial H}{\partial q_s}(t) + \frac{\partial H}{\partial q_{s\tau}}(t+\tau) - Q''_s(t) = 0, \quad t_1 \leq t \leq t_2 - \tau, \\ \dot{p}_s(t) + \frac{\partial H}{\partial q_s}(t) - Q''_s(t) = 0, \quad t_2 - \tau < t \leq t_2 \quad (15)$$

联立方程 (13) 和 (15) 给出含时滞的非保守力学系统的 Hamilton 正则方程; 如果非势广义力学系统的 $Q''_s = 0$, 则方程 (13) 和 (15) 给出含时滞的保守力学系统的 Hamilton 正则方程; 如果时滞常量 $\tau = 0$, 则方程 (13) 和 (15) 给出经典 Hamilton 正则方程。

2 相空间中含时滞的 Hamilton 作用量的变分

相空间中含时滞的 Hamilton 作用量为

$$S(\gamma) = \int_{t_1}^{t_2} (p_s(t) \dot{q}_s(t) + p_{s\tau}(t-\tau) \dot{q}_s(t-\tau) - H) dt = \int_{t_1}^{t_2} (p_s \dot{q}_s + p_{s\tau} \dot{q}_{s\tau} - H) dt \quad (16)$$

引入 r -参数有限群的无限小变换

$$\bar{t} = t + \Delta t, \quad \bar{q}_s(\bar{t}) = q_s(t) + \Delta q_s(t), \quad \bar{p}_s(\bar{t}) = p_s(t) + \Delta p_s(t) \quad (s = 1, 2, \dots, n) \quad (17)$$

其展开式为

$$\bar{t} = t + \varepsilon_\sigma \xi_0^\sigma(t, q_k, p_k), \quad \bar{q}_s = q_s + \varepsilon_\sigma \xi_s^\sigma(t, q_k, p_k), \\ \bar{p}_s = p_s + \varepsilon_\sigma \eta_s^\sigma(t, q_k, p_k) \quad (s, k = 1, 2, \dots, n) \quad (18)$$

其中, ε_σ ($\sigma = 1, 2, \dots, r$) 为无限小参数, $\xi_0^\sigma, \xi_s^\sigma, \eta_s^\sigma$ 为无限小变换的生成函数或生成元。作用量 (16) 的变分为^[25]

$$\Delta S = \int_{t_1}^{t_2-\tau} \left\{ [\Delta p_s \dot{q}_s(t) + \Delta \dot{q}_s p_s(t) + \Delta p_s \dot{q}_{s\tau}(t+\tau) + \Delta \dot{q}_{s\tau} p_{s\tau}(t+\tau)] - \frac{\partial H}{\partial t}(t) \Delta t - \frac{\partial H}{\partial q_s}(t) \Delta q_s - \frac{\partial H}{\partial p_s}(t) \Delta p_s - \frac{\partial H}{\partial q_{s\tau}}(t+\tau) \Delta q_s - \frac{\partial H}{\partial p_{s\tau}}(t+\tau) \Delta p_s + (p_s(t) \dot{q}_s(t) + p_{s\tau}(t+\tau) \dot{q}_{s\tau}(t+\tau) - H) \frac{d}{dt} \Delta t \right\} dt + \int_{t_2-\tau}^{t_2} \left[\Delta p_s \dot{q}_s(t) + \Delta \dot{q}_s p_s(t) - \frac{\partial H}{\partial t}(t) \Delta t - \frac{\partial H}{\partial q_s}(t) \Delta q_s - \frac{\partial H}{\partial p_s}(t) \Delta p_s + (p_s(t) \dot{q}_s(t) - H) \frac{d}{dt} (\Delta t) \right] dt \quad (19)$$

式 (19) 也可写为

$$\Delta S = \int_{t_1}^{t_2-\tau} \varepsilon_\sigma \left\{ \frac{d}{dt} [(p_s(t) + p_{s\tau}(t+\tau)) \bar{\xi}_s^\sigma + (p_s(t) \dot{q}_s(t) + p_{s\tau}(t+\tau) \dot{q}_{s\tau}(t+\tau) - H) \xi_0^\sigma] + (-\dot{p}_s(t) - \dot{p}_{s\tau}(t+\tau) - \frac{\partial H}{\partial q_s}(t) - \frac{\partial H}{\partial q_{s\tau}}(t+\tau)) \bar{\xi}_s^\sigma + (\dot{q}_s(t) + \dot{q}_{s\tau}(t+\tau) - \frac{\partial H}{\partial p_s}(t) - \frac{\partial H}{\partial p_{s\tau}}(t+\tau)) \bar{\eta}_s^\sigma \right\} dt + \int_{t_2-\tau}^{t_2} \varepsilon_\sigma \left\{ \frac{d}{dt} [p_s(t) \bar{\xi}_s^\sigma + (p_s(t) \dot{q}_s(t) - H) \xi_0^\sigma] - (\dot{p}_s(t) + \frac{\partial H}{\partial q_s}(t)) \bar{\xi}_s^\sigma + (\dot{q}_s(t) - \frac{\partial H}{\partial p_s}(t)) \bar{\eta}_s^\sigma \right\} dt \quad (20)$$

其中

$$\bar{\xi}_s^\sigma = \xi_s^\sigma - \dot{q}_s \xi_0^\sigma, \quad \bar{\eta}_s^\sigma = \eta_s^\sigma - \dot{p}_s \xi_0^\sigma \quad (\sigma = 1, 2, \dots, r) \quad (21)$$

式 (19) 和 (20) 是相空间中含时滞的 Hamilton 作用量的变分的两个基本公式。

3 相空间中含时滞的 Noether 广义准对称变换

下面我们来建立相空间中含时滞的 Noether 广义准对称变换的定义和判据。

假设 H' 是某个另外的 Hamilton 函数，若变换 (17) 精确到一阶小量满足

$$\int_{t_1}^{t_2} [p_s(t)\dot{q}_s(t) + p_s(t-\tau)\dot{q}_s(t-\tau) - H] dt = \int_{t_1}^{t_2} [\bar{p}_s(\bar{t})\dot{\bar{q}}_s(\bar{t}) + \bar{p}_{sr}(\bar{t})\dot{\bar{q}}_{sr}(\bar{t}) - H'(\bar{t}, \bar{q}_k(\bar{t}), \bar{p}_k(\bar{t}), \bar{q}_{kr}(\bar{t}), \bar{p}_{kr}(\bar{t}))] d\bar{t} + \int_{t_1}^{t_2} Q''_s \delta q_s dt \quad (22)$$

则称这种不变性为相空间中舍时滞的 Hamilton 作用量在无限小变换 (17) 下的广义准不变性，而变换 (17) 称为相空间中舍时滞的 Noether 广义准对称变换。于是有

定义 1 若舍时滞的 Hamilton 作用量 (16) 在无限小群变换 (17) 作用下，满足条件

$$\Delta S = - \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{d}{dt}(\Delta G) + Q''_s \delta q_s \right] dt \quad (23)$$

其中 $\Delta G = \varepsilon_\sigma G^\sigma$ ， $G^\sigma = G^\sigma(t, p_s, q_s, p_{sr}, q_{sr})$ 为规范函数，则称无限小变换 (17) 为相空间中舍时滞的 Noether 广义准对称变换。

由定义 1 和变分公式 (19)，(20) 式，得到如下判据。

判据 1 如果无限小群变换 (17)，当 $t_1 \leq t \leq t_2 - \tau$ 时，满足条件

$$\begin{aligned} & \Delta p_s(\dot{q}_s(t) + \dot{q}_{sr}(t + \tau)) + (p_s(t) + p_{sr}(t + \tau))\Delta\dot{q}_s - \frac{\partial H}{\partial t}(t)\Delta t - \frac{\partial H}{\partial q_s}(t)\Delta q_s - \frac{\partial H}{\partial p_s}(t)\Delta p_s - \frac{\partial H}{\partial q_{sr}}(t + \tau)\Delta q_s - \frac{\partial H}{\partial p_{sr}}(t + \tau)\Delta p_s + Q''_s(t)(\Delta q_s - \dot{q}_s\Delta t) + (p_s(t)\dot{q}_s(t) + p_{sr}(t + \tau)\dot{q}_{sr}(t + \tau) - H) \frac{d}{dt}(\Delta t) = - \frac{d}{dt}(\Delta G) \end{aligned} \quad (24)$$

当 $t_2 - \tau < t \leq t_2$ 时，满足条件

$$\begin{aligned} & \Delta p_s \dot{q}_s(t) + p_s(t)\Delta\dot{q}_s - \frac{\partial H}{\partial t}(t)\Delta t - \frac{\partial H}{\partial q_s}(t)\Delta q_s - \frac{\partial H}{\partial p_s}(t)\Delta p_s + Q''_s(t)(\Delta q_s - \dot{q}_s\Delta t) + (p_s(t)\dot{q}_s(t) - H) \frac{d}{dt}(\Delta t) = - \frac{d}{dt}(\Delta G) \end{aligned} \quad (25)$$

则变换 (17) 是相空间中舍时滞的 Noether 广义准对称变换。

式 (24) 和 (25) 也可写成：当 $t_1 \leq t \leq t_2 - \tau$ 时，有

$$\begin{aligned} & (p_s(t) + p_{sr}(t + \tau))\dot{\xi}_s^\sigma - \frac{\partial H}{\partial t}(t)\xi_0^\sigma - \left(\frac{\partial H}{\partial q_s}(t) + \frac{\partial H}{\partial q_{sr}}(t + \tau) \right) \xi_s^\sigma - H\xi_0^\sigma + \end{aligned}$$

$$Q''_s(\xi_s^\sigma - \dot{q}_s\xi_0^\sigma) = -\dot{G}^\sigma, \quad (\sigma = 1, 2, \dots, r) \quad (26)$$

当 $t_2 - \tau < t \leq t_2$ 时，有

$$\begin{aligned} & p_s(t)\dot{\xi}_s^\sigma - \frac{\partial H}{\partial t}(t)\xi_0^\sigma - \frac{\partial H}{\partial q_s}(t)\xi_s^\sigma - H\xi_0^\sigma + Q''_s(\xi_s^\sigma - \dot{q}_s\xi_0^\sigma) = -\dot{G}^\sigma, \quad (\sigma = 1, 2, \dots, r) \end{aligned} \quad (27)$$

当 $r = 1$ 时，式 (26) 和 (27) 称为相空间中舍时滞的非保守力学系统的 Noether 等式。

判据 2 如果无限小群变换 (18)，当 $t_1 \leq t \leq t_2 - \tau$ 时，满足条件

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt}[(p_s(t) + p_{sr}(t + \tau))\bar{\xi}_s^\sigma + (p_s(t)\dot{q}_s(t) + p_{sr}(t + \tau)\dot{q}_{sr}(t + \tau) - H)\xi_0^\sigma + G^\sigma] + \left(-\dot{p}_s(t) - \dot{p}_{sr}(t + \tau) - \frac{\partial H}{\partial t}(t) - \frac{\partial H}{\partial q_{sr}}(t + \tau) + Q''_s \right) \bar{\xi}_s^\sigma + \left(\dot{q}_s + \dot{q}_{sr}(t + \tau) - \frac{\partial H}{\partial p_s} - \frac{\partial H}{\partial p_{sr}}(t + \tau) \right) \bar{\eta}_s^\sigma = 0 \end{aligned} \quad (\sigma = 1, 2, \dots, r) \quad (28)$$

当 $t_2 - \tau < t \leq t_2$ 时，满足条件

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt}[p_s(t)\bar{\xi}_s^\sigma + (p_s(t)\dot{q}_s(t) - H)\xi_0^\sigma + G^\sigma] + \left(-\dot{p}_s(t) - \frac{\partial H}{\partial q_s}(t) + Q''_s \right) \bar{\xi}_s^\sigma + \left(\dot{q}_s(t) - \frac{\partial H}{\partial p_s}(t) \right) \bar{\eta}_s^\sigma = 0, \quad (\sigma = 1, 2, \dots, r) \end{aligned} \quad (29)$$

则变换 (18) 是相空间中舍时滞的 Noether 广义准对称变换。

利用判据 1 或判据 2，可以判断相空间中舍时滞的非保守力学系统的 Noether 对称性。

4 相空间中舍时滞的非保守力学系统的 Noether 定理

对于相空间中舍时滞的非保守力学系统 (13) 和 (15)，若能够找到系统的 Noether 广义准对称变换，便可求得相应的守恒量。有如下定理：

定理 1 对于相空间中舍时滞的非保守力学系统，如果无限小群变换 (17) 是相空间中舍时滞的 Noether 广义准对称变换，则系统存在 r 个线性独立的守恒量，当 $t_1 \leq t \leq t_2 - \tau$ 时，形如

$$I = (p_s(t) + p_{sr}(t + \tau))\xi_s^\sigma - H\xi_0^\sigma + G^\sigma = \text{const} \quad (30)$$

当 $t_2 - \tau < t \leq t_2$ 时，形如

$$I = p_s(t)\xi_s^\sigma - H\xi_0^\sigma + G^\sigma = \text{const}. \quad (\sigma = 1, 2, \dots, r) \quad (31)$$

证明 将相空间中含时滞的非保守力学系统的运动微分方程 (13) 和 (15) 代入式 (28) 和 (29), 由定义 1 和判据 2, 得到: 当 $t_1 \leq t \leq t_2 - \tau$ 时

$$\frac{d}{dt}[(p_s(t) + p_{s\tau}(t + \tau))\bar{\xi}_s^\sigma + (p_s(t)\dot{q}_s(t) + p_{s\tau}(t + \tau)\dot{q}_{s\tau}(t + \tau) - H)\xi_0^\sigma + G^\sigma] = 0 \quad (32)$$

当 $t_2 - \tau < t \leq t_2$ 时

$$\frac{d}{dt}[p_s(t)\bar{\xi}_s^\sigma + (p_s(t)\dot{q}_s(t) - H)\xi_0^\sigma + G^\sigma] = 0, \quad (\sigma = 1, 2, \dots, r) \quad (33)$$

对式 (32) 和 (33) 积分, 便得到结果。证毕。

定理 1 称为相空间中含时滞的非保守力学系统的 Noether 定理。由定理 1 知, 如果能找到系统的一个 Noether 广义准对称变换, 便可能得到系统的一个守恒量。

5 算例

例 已知含时滞的力学系统的 Lagrange 函数为

$$L = \frac{1}{2}[\dot{q}(t) + \dot{q}(t - \tau)]^2 - [q(t) + q(t - \tau)] \quad (34)$$

非势广义力为

$$Q''(t) = -\dot{q}(t - \tau)q(t - \tau) \quad (35)$$

由 (2) 式, 得到

$$p(t) = \dot{q}(t) + \dot{q}(t - \tau), p(t - \tau) = \dot{q}(t) + \dot{q}(t - \tau), \\ H = \frac{1}{8}[p(t) + p(t - \tau)]^2 + [q(t) + q(t - \tau)] \quad (36)$$

则系统的运动微分方程为

$$\dot{q}(t) + \dot{q}_\tau(t + \tau) - \frac{1}{4}[2p(t) + p(t - \tau) + p(t + \tau)] = 0,$$

$$\dot{p}(t) + \dot{p}_\tau(t + \tau) + 2 = -\dot{q}(t - \tau)q(t - \tau), \quad t \in [t_1, t_2 - \tau];$$

$$\dot{q}(t) - \frac{1}{4}[p(t) + p(t - \tau)] = 0, \quad \dot{p}(t) + 1 = -\dot{q}(t - \tau)q(t - \tau), \quad t \in (t_2 - \tau, t_2] \quad (37)$$

由 Noether 等式 (26) 和 (27), 得到

$$[p(t) + p_\tau(t + \tau)]\dot{\xi}_1 - 2\xi_1 - H\dot{\xi}_0 - \dot{q}(t - \tau) \cdot q(t - \tau)(\xi_1 - \dot{q}(t)\xi_0) = -\dot{G}, \quad t \in [t_1, t_2 - \tau] \quad (38)$$

$$p(t)\dot{\xi}_1 - \xi_1 - H\dot{\xi}_0 - \dot{q}(t - \tau)q(t - \tau) \cdot (\xi_1 - \dot{q}(t)\xi_0) = -\dot{G}, \quad t \in (t_2 - \tau, t_2] \quad (39)$$

方程 (38) 有解

$$\xi_0 = 0, \quad \xi_1 = 1, \quad G = \frac{1}{2}q^2(t - \tau) + 2t,$$

$$t \in [t_1, t_2 - \tau] \quad (40)$$

方程 (39) 有解

$$\xi_0 = 0, \quad \xi_1 = 1, \quad G = \frac{1}{2}q^2(t - \tau) + t, \quad t \in (t_2 - \tau, t_2] \quad (41)$$

生成元 (40) 和 (41) 相应于所论含时滞的非保守系统的 Noether 对称性, 根据定理 1, 系统有如下守恒量

$$I = p(t) + p_\tau(t + \tau) + \frac{1}{2}q^2(t - \tau) + 2t = \text{const}, \quad t \in [t_1, t_2 - \tau] \quad (42)$$

$$I = p(t) + \frac{1}{2}q^2(t - \tau) + t = \text{const}, \quad t \in (t_2 - \tau, t_2] \quad (43)$$

式 (42) 和 (43) 是所论相空间中含时滞的非保守系统相应于 Noether 对称性 (40) 和 (41) 的 Noether 守恒量。

6 结论

文中研究了相空间中含时滞非保守力学系统的 Noether 对称性与守恒量。建立了含时滞的非保守力学系统的运动微分方程; 依据相空间中含时滞的 Hamilton 作用量的两个基本公式, 定义了相空间中含时滞的 Noether 广义准称变换, 给出了相空间中含时滞的 Noether 广义准称变换的判据; 建立了相空间中含时滞的非保守力学系统的 Noether 对称性与守恒量之间的联系。本文的结果具有普遍性, 可以进一步拓展到含时滞的最优控制系统、含时滞的 Birkhoff 系统等。

参考文献:

- [1] 徐鉴, 斐利军. 时滞系统动力学近期研究进展与展望 [J]. 力学进展, 2006, 36(1): 17-29.
- [2] 胡海岩, 王在华. 非线性时滞动力学系统的研究进展 [J]. 力学进展, 1999, 29(4): 501-512.
- [3] 王在华, 胡海岩. 时滞动力系统的稳定性与分岔: 从理论走向应用 [J]. 力学进展, 2013, 43(1): 3-20.
- [4] DJUKIĆ Dj S, VUJANOVIĆ B. Noether's theory in classical nonconservative mechanics [J]. Acta Mech, 1975, 23 (1/2): 17-27.
- [5] LUTZKY M. Dynamical symmetries and conserved quantities [J]. J Phys A: Math Gen, 1979, 12(7): 973-981.
- [6] HOJMAN S A. A new conservation law constructed without using either Lagrangians or Hamiltonians [J]. J Phys A: Math Gen, 1992, 25: L291-L295.
- [7] 赵跃宇. 非保守力学系统的 Lie 对称性和守恒量 [J].

- 力学学报, 1994, 26(3): 380 – 384.
- [8] 梅凤翔. 李群和李代数对约束力学系统的应用[M]. 北京: 科学出版社, 1999.
- [9] 梅凤翔. 约束力学系统的对称性与守恒量[M]. 北京: 北京理工大学出版社, 2004.
- [10] 王树勇, 梅凤翔. 相空间中完整约束系统的形式不变性[J]. 中山大学学报: 自然科学版, 2002, 41(6): 10 – 13.
- [11] FU J L, CHEN L Q, CHEN B Y. Noether-type theory for discrete mechanico-electrical dynamical systems with nonregular lattices[J]. *Sci China: Phys Mech Astron*, 2010, 53(9): 1687 – 1698.
- [12] 张毅. 非完整力学系统的 Hamilton 对称性[J]. *中国科学: 物理学 力学 天文学*, 2010, 40(9): 1130 – 1137.
- [13] 张毅. 相空间中类分数阶变分问题的 Noether 对称性与守恒量[J]. *中山大学学报: 自然科学版*, 2013, 52(4): 45 – 50.
- [14] 龙梓轩, 张毅. 基于按正弦周期律拓展的分数阶积分的变分问题的 Noether 定理[J]. *中山大学学报: 自然科学版*, 2013, 52(5): 51 – 56.
- [15] LUO S K, LI L. Fractional generalized Hamiltonian equations and its integral invariants[J]. *Nonlinear Dynamics*, 2013, 73(1/2): 339 – 346.
- [16] ZHANG Y, ZHOU Y. Symmetries and conserved quantities for fractional action-like Pfaffian variational problems[J]. *Nonlinear Dynamics*, 2013, 73(1/2): 783 – 793.
- [17] EL'SGOL'C L E. Qualitative methods in mathematical analysis[M]. Providence: American Mathematical Society, 1964.
- [18] HUGHES D K. Variational and optimal control problems with delayed argument [J]. *J Optim Theory Appl*, 1968, 2(1): 1 – 14.
- [19] PALM W J, Schmitendorf W E. Conjugate-point conditions for variational problems with delay argument[J]. *J Optim Theory Appl*, 1974, 14(6): 599 – 612.
- [20] ROSENBLUETH J F. Systems with time delay in the calculus of variations: a variational approach[J]. *IMA J Math Control Inform*, 1988, 5(2): 125 – 145.
- [21] CHAN W L, YUNG S P. Sufficient conditions for variational problems with delayed argument [J]. *J Optim Theory Appl*, 1993, 76(1): 131 – 144.
- [22] LEE C H, Yung S P. Sufficient conditions for optimal control problems with time delay [J]. *J Optim Theory Appl*, 1996, 88(1): 157 – 176.
- [23] FREDERICO G S F, TORRES D F M. Noether's symmetry theorem for variational and optimal control problems with time delay [J]. *Numerical Algebra, Control and Optimization*, 2012, 2(3): 619 – 630.
- [24] 张毅, 金世欣. 舍时滞的非保守系统动力学的 Noether 理论 [J]. *物理学报*, 2013, 62(21): 214502.
- [25] JIN S X, ZHANG Y. Noether symmetry and conserved quantity for a Hamilton system with time delay [J]. *Chinese Physics B*, 2014, 23(5): 054501.

(上接第 55 页)

- [3] 文家焱; 梁世东. 基于绝热量子演化的量子状态转换方法[J]. *中山大学学报: 自然科学版*, 2007, 46(4): 22 – 25.
- [4] ZEH H D. On the interpretation of measurement in quantum theory[J]. *Found Phys*, 1970, 1(1): 69 – 76.
- [5] ZUREK W H. Pointer basis of quantum apparatus: Into what mixture does the wave packet collapse [J]. *Phys Rev D*, 1981, 24(6): 1516 – 1525.
- [6] ZUREK W H. Environment-induced superselection rules [J]. *Phys Rev D*, 1982, 26(8): 1862 – 1880.
- [7] BOSE S, JACOBS K, KNIGHT K L. Scheme to probe the decoherence of a macroscopic object [J]. *Phys Rev A*, 1999, 59(5): 3204 – 3210.
- [8] SUN C P, LIU X F, ZHOU D L, et al. Localization of a macroscopic object induced by the factorization of internal adiabatic motion [J]. *Eur Phys J D*, 2001, 17(10): 85 – 92.
- [9] ZHANG P, LIU X F, SUN C P. Consistent approach for quantum measurement [J]. *Phys Rev A*, 2002, 66(4): 042104.
- [10] BRUNE M, HAGLEY E, DREYER J, et al. Observing the progressive decoherence of the “Meter” in a quantum measurement [J]. *Phys Rev Lett*, 1996, 77(24): 4887 – 4890.
- [11] MYATT C J, KING B, TURCHETTE Q A, et al. Decoherence of quantum superpositions through coupling to engineered reservoirs [J]. *Nature*, 2000, 403(1): 269 – 273.
- [12] FRIEDMAN J R, PATEL V, CHEN W, et al. Quantum superposition of distinct macroscopic states [J]. *Nature*, 2000, 406(6): 43 – 46.
- [13] ZHENG L, LI C, LI Y, et al. Localization of the relative position of two atoms induced by spontaneous emission [J]. *Phys Rev A*, 2005, 71(6): 062101.
- [14] ZHENG L, YANG C P, NORI F. Quantum dynamics of spatial decoherence of two atoms in a ring cavity [J]. *Phys Rev A*, 2010, 82(6): 062106.